Problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas celebradas desde el año 2000 hasta el 2006 en la fase provincial de Ciudad Real

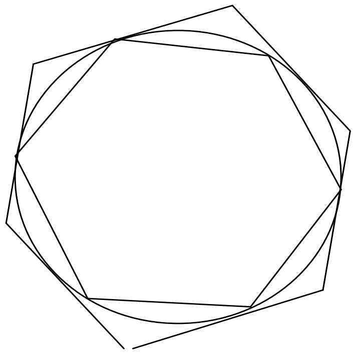
Miguel Adán Oliver
Representante de la SCMPM en Ciudad Real
I.E.S. Stª Mª de Alarcos. Rda. Granada, 2. 13004 Ciudad Real.
Tfno.926230647 Fax 926230520
http://es.geocities.com/matesdep/index.htm
matesdep@yahoo.es
Página de la SCMPM: http://mates.albacete.org/

PROBLEMAS del NIVEL-1 (1º-2º E.S.O.)

1. Un cuadrado mágico como el de la figura tiene la propiedad de que la suma de los números que hay en cada fila es 15, y lo mismo ocurre con todas las columnas, ¡y con todas las diagonales!. ¿Sabrías hacer un cuadrado mágico en el que la suma fuera 51 en lugar de 15?.

2	**7**	**6**
9	**5**	**1**
4	**3**	**8**

2. Tenemos dos hexágonos regulares, uno de ellos está inscrito a una circunferencia y el otro está circunscrito a ella. Se sabe que el área del hexágono inscrito es de 5 m^2. Calcula el área del que está circunscrito.



3. Juanito iba contento al colegio porque llevaba bien resuelta la tarea de ese día, que era multiplicar dos números. Por el camino empezó a llover y las gotas de lluvia habían borrado muchas de las cifras de la operación, únicamente quedaban las que veis aquí:

```
      _ 1 _
      3 _ 2
    -------
        _ 3 _
    3 _ 2 _
  _ 2 _ 5
  -----------
  1 _ 8 _ 3 0
```

Ayuda a Juanito a encontrar las cifras que se le han borrado.

4. El número a=999...99 tiene en total 99 cifras (que son todas iguales a nueve). ¿Cuántas cifras tendrá después de haberlo multiplicado por 99 ?¿Cuánto suman todas las cifras de dicho número?

PINTAR EL CUBO

Cada una de las caras de un cubo se divide en cuatro cuadrados iguales. Estos cuadrados se colorean de manera que cada dos cuadrados vecinos (que tienen un lado común) tengan colores distintos.

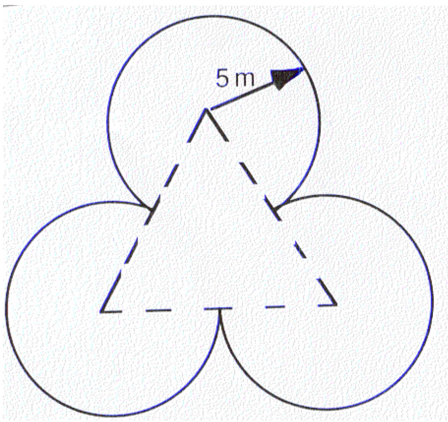
Justifica cuál será el número mínimo de colores que tenemos que usar.

¿Decimos la verdad si aseguramos que usamos nueve veces el color rojo?.

LA FUENTE

En el parque hay una fuente que tiene forma de trébol. Dicen que es la más grande de la ciudad.

¿Cuántos litros de agua caben si la profundidad es de un metro?.

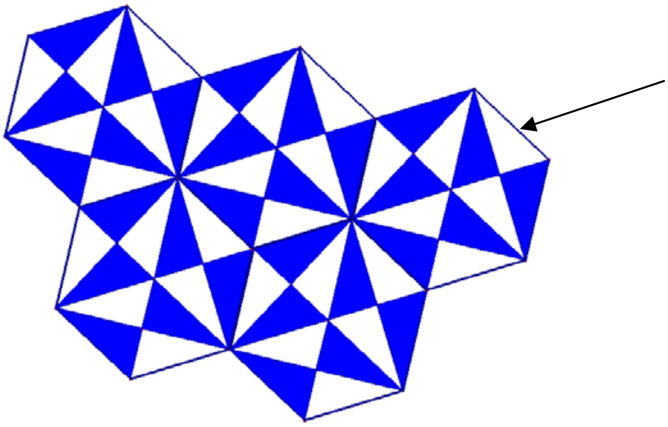


HUEVOS DE GALLINA Y PATA

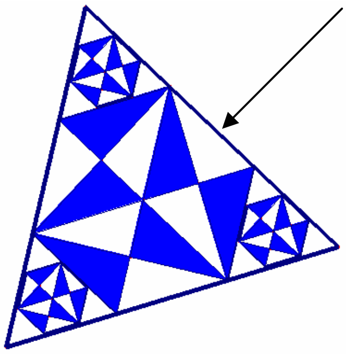
El huevero tiene ante sí seis cestas con huevos. Algunas son de gallina y otras de pata. En las cestas hay 6, 12, 14, 15, 23 y 29 huevos respectivamente.

El huevero dice: Si vendo esta cesta me quedarán doble de huevos de gallina que de pata. ¿De qué cesta está hablando?..

Parquet de Gaudí. *El catalán Antoni Gaudí, uno de los más grandes arquitectos del siglo XX, diseñó el suelo de parquet que estás viendo.*



a) Si el lado indicado porla flecha mide 10 cm, ¿cuánto miden los lados de los triángulos oscuros? .
b) En la siguiente figura hemos rellenado un triángulo equilátero (cuyo lado mide 30 cm) con figuras de Gaudí. ¿Sabrías decir lo que miden los lados de los triángulos oscuros pequeñitos?.
c) ¿Cuánto mide el área blanca de la figura?



Retrocediendo en el tiempo.

Si retrocediésemos en el tiempo, nos daríamos cuenta de cómo han cambiado las medidas. Antiguamente se usaban en Castilla medidas de longitud muy diferentes de las actuales pues no se conocía aún el Sistema Métrico Décimal. La medida utilizada para distancias largas era la Legua, seguida del Estadal, la Vara, el Pié y la Pulgada.
Entre los papeles de mi abuelo encontré las siguientes anotaciones:

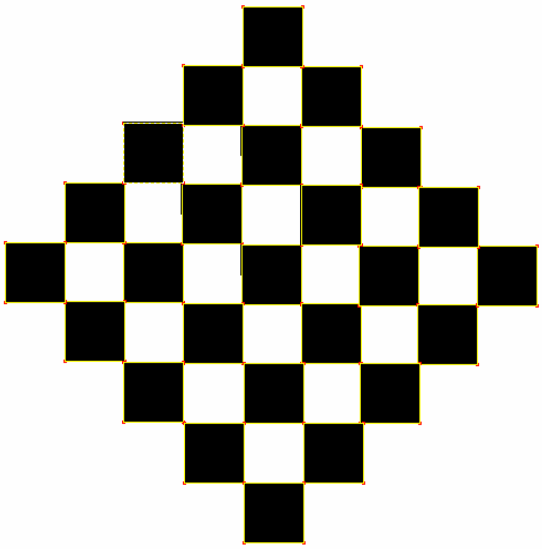
*Un estadal son tantos pies como pulgadas tiene un pie.
*Una legua son exactamente 20.000 pies.
*36 pies son tantas varas como varas tienen 3 estadales.

Seguro que sabes responder las siguientes cuestiones:

a)¿Cuántas pulgadas tiene una legua?
b)¿Cuántas pulgadas tienen 5 pies?
c) ¿Cuántos estadales tiene una legua?

El Damero bicolor

Los dameros bicolores como el de la figura que ves, están formados por baldosas blancas y negras, pero siempre los bordes están formados con baldosas negras. La anchura del que estás viendo es de 9 baldosas. Si en vez de este mosaico tuviésemos otro con una anchura de 153 baldosas, ¿cuántas baldosas tendríamos en total?

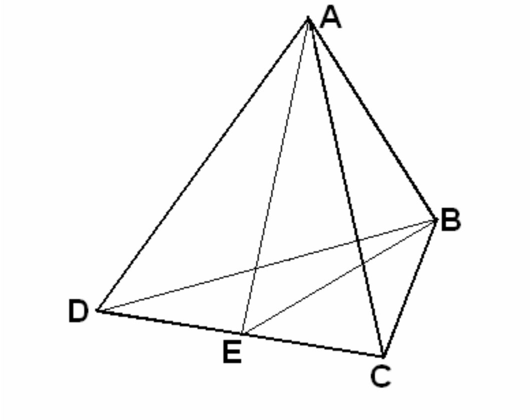


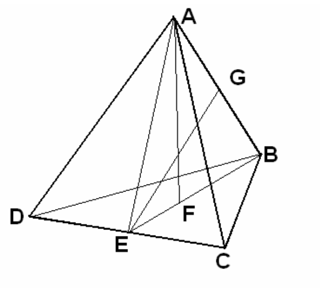
La nevada

Ayer estuvo nevando. Nevó bastantes minutos y la nieve caía de una manera constante y pausada. Hoy una máquina quitanieves se ha encargado de despejar la calle. En un solo segundo la máquina quitanieves del ayuntamiento es capaz de retirar tanta nieve como la que cayó durante un minuto en un metro cuadrado de calle. En este momento son las 11 horas y 45 minutos y acaban de terminar de limpiar los 100 metros cuadrados de calle que están frente a mi puerta. La máquina empezó a limpiar a las 8 en punto de la mañana, ¿cuántas horas estuvo nevando ayer?.

Mi Pirámide.

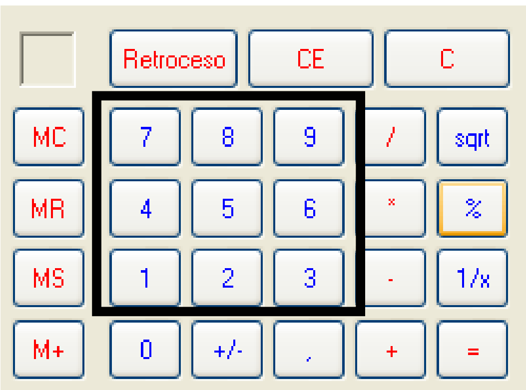
He tomado una gran plancha de cartón y he recortado un gran triángulo equilátero de 2 metros de lado. A continuación, he marcado los puntos medios de cada lado y he dibujado los tres segmentos que los unen. He doblado el cartón por estos segmentos y he obtenido una pirámide triángular ABCD. ¿Sabrías calcular el área de cada una de sus caras?. Si cortas la pirámide por la mitad ¿Cuál es el área del triángulo ABE que separa las dos mitades?. Calcula el valor de las tres alturas de dicho triángulo.





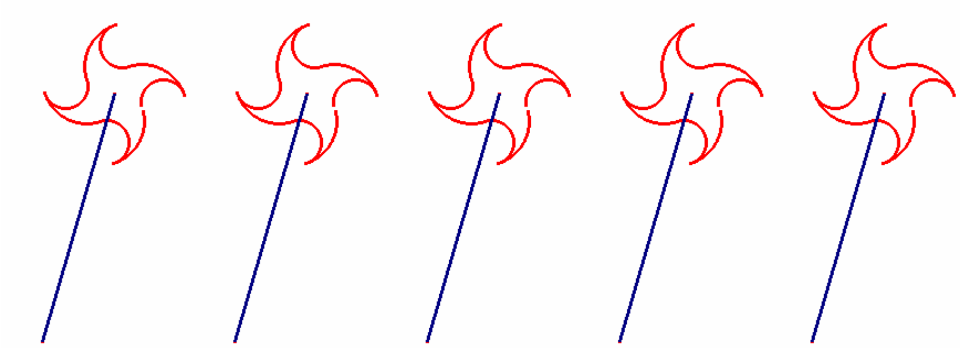
Una mala calculadora

La calculadora de la figura está changada. Una de las teclas que hay en el recuadro negro no funciona. Al pulsar aparece otro de los dígitos del recuadro pero no el que corresponde. Al poner el número 987654321 aparece en pantalla otro distinto y resulta que es divisible por 11. Además, al dividirlo por 9 se obtiene de resto 3.
¿Sabrías decirnos qué tecla es la que está rota?, ¿cuál es el número que apareció en la pantalla?

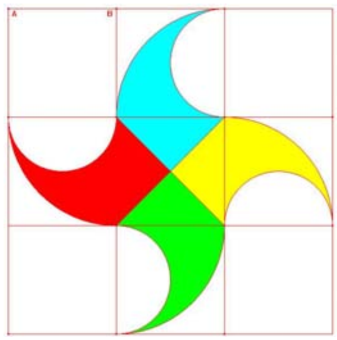


El molinillo

A los niños pequeños (y a muchos mayores) les gustan los molinillos de colores como estos que ves para correr y hacerlos girar.



A algunos mayores, sobre todo a los que disfrutan con las Matemáticas, les suele gustar analizar formas geométricas muy variadas.
Mirando de cerca el molinillo y suponiendo que sabemos que AB mide 10 cm, calcula el perímetro y el área total.



Un problema de árboles

En el mes de octubre un arbusto tiene 6 ramas sanas. De cada rama saldrán 4 ramas nuevas en primavera, de las cuales una seguro que enfermará en invierno y quedará sin brotes con lo que no producirá más ramas en la siguiente primavera. En cambio a cada una de las ramas sanas les ocurrirá lo mismo que a las ramas iniciales, es decir, que de cada una de ellas saldrán cuatro nuevas ramas en la primavera siguiente, de las cuales una enfermará en invierno, …
¿Cuántas ramas habrá después de cinco años, si ninguna rama ha caido?.
Después de 10 años, ¿cuántas ramas enfermas y cuántas sanas habrá en el arbusto si no se ha caido ninguna?

Una barbaridad de sumas

Fíjate bien el las siguientes sumas de 8 números:

7272+727+72+7+2+27+272+2727 es múltiplo de 1234
4444+444+44+4+3+33+333+3333 es múltiplo de 1234

a) ¿Sabrías encontrar 10 números, en los que solo intervengan los dígitos 7 y 2, para los que su suma sea múltiplo de 12345?

b) ¿Sabrías encontrar 10 números, en los que solo intervengan los dígitos 2 y 6, para los que su suma sea múltiplo de 12345?

c) ¿Sabrías encontrar 15 números, en los que solo intervengan los dígitos 1, 3 y 4, para los que su suma sea múltiplo de 12345?

d) ¿Sabrías encontrar números, en los que solo intervenga el dígito 8, para los que su suma sea múltiplo de 12345?

OLIMPIADA MATEMÁTICA de CIUDAD REAL
SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

El Kakuro

Definitivamente los juegos de cálculo y lógica han triunfado en este último año. Uno de los que seguramente tendrá éxito será el Kakuro. Las reglas de este juego son muy simples:

1.- Completar cada casilla blanca con un número del 1 al 9, de manera que el total de la suma en cada columna y fila resulte la cifra indicada en las casillas negras situada encima de la columna y a la izquierda de la fila.

2.- Las filas y columnas no pueden contener números repetidos.

Te ponemos un ejemplo para que lo entiendas mejor:

El Kakuro siguiente

	3↓	19↓			
3→			6↓		
13→				4↓	
	12→				
		3→			

Tiene como solución:

	3↓	19↓			
3→	1	2	6↓		
13→	2	9	3	4↓	
	12→	8	1	3	
		3→	2	1	

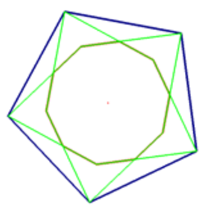
Una vez comprendido bien el juego, intenta resolver los dos kakuros siguientes:

			26↓	13↓		
	3↓	8→			10↓	
14→						
26→						
	4→					

	7↓	34 ↓	26 ↓	28 ↓	12 ↓		
10 →							
29 →						28 ↓	7↓
22 →					4 → 14 ↓		
32 →							
12 →			11 → 4↓				
		13 →					
		27 →					

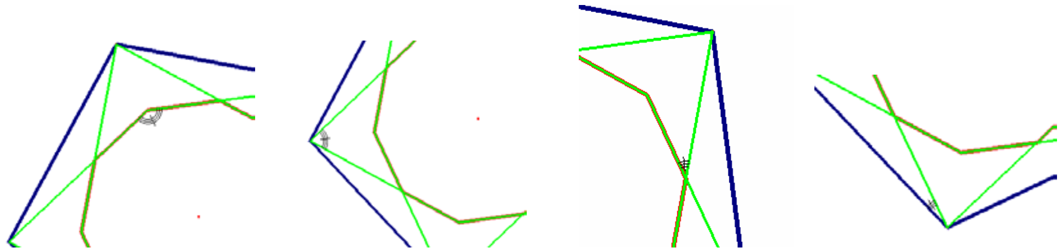
El pentágono

Si observas la siguiente figura, reconocerás en ella dos características geométricas presentes en muchas de las figuras y formas que encontramos habitualmente: **regularidad** y **simetría**.



Fíjate bien en ella y contesta (explicando tu respuesta) a las siguientes cuestiones. Para ello no se requiere ningún instrumento de medida, únicamente observación, descomposición y algún conocimiento geométrico elemental.

1) ¿Cuánto miden los ángulos marcados en las siguientes imágenes?.
2) Encuentra alguna relación entre dichas medidas.



(A) (B) (C) (D)

Unas vueltas al mundo

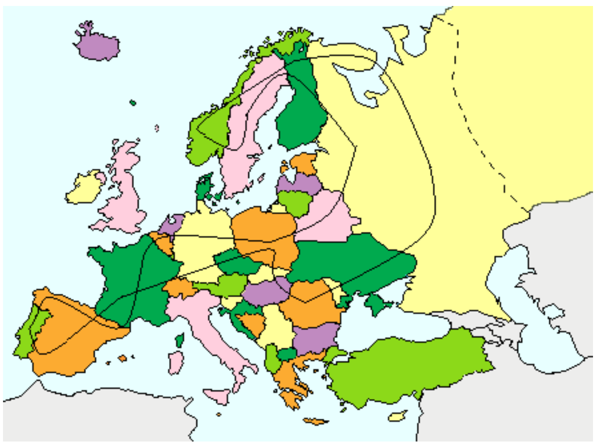
Bernardino es un viajero incansable, no hay nada que le guste más que viajar. El año pasado emprendió un viaje sin fin por toda Europa. Comenzó a andar como lo hacía "Garbancito", dejando cada 120 metros la señal ⊗ en el suelo para poder construir así su circuito europeo (¡nos olvidaremos en este problema de los lagos, mares y océanos!). Cuando llegó de nuevo al punto de salida, continuó andando por circuito ya marcado y en esta ocasión dejaba la marca (■) cada 100 metros. En la tercera vuelta marcó con un # cada 40 metros.

Te pedimos que rellenes la tabla siguiente y que nos expliques cómo lo has hecho.

Nº de puntos en el camino que tienen:

Alguna marca	(⊗,■,#)	(■,#)	Dos marcas cualesquiera	Una única marca

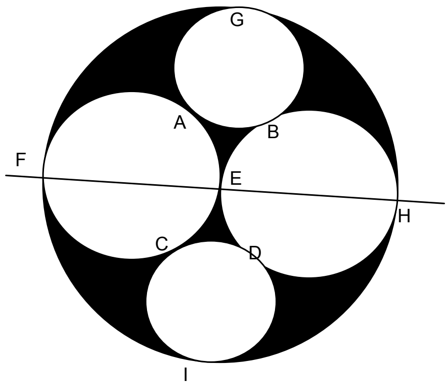
Nota de ayuda: El circuito de Bernardino tiene 7.200 Km.



PROBLEMAS del NIVEL-2 (3º-4º E.S.O.)

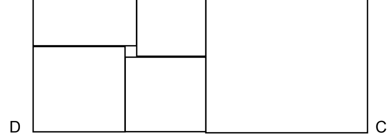
Estaciones
En cada estación de una red ferroviaria se venden tantos billetes distintos como estaciones a las que se puede ir o desde las que se puede venir (los billetes de ida y los de vuelta son distintos). Se inaugura una nueva línea con varias estaciones y eso obliga a imprimir 34 nuevos billetes distintos. ¿Cuántas estaciones había y cuántas nuevas se han inaugurado?

Circunferencias
En la figura puedes apreciar cuatro circunferencias dentro de otra. Hay dos grandes y dos pequeñas y según se ve las circunferencias son tangentes unas a otras en los puntos A,B,C,D,E,F,G,H,I. Supongamos que el radio de las dos circunferencias grandes es 1 metro. ¿Cuánto mide el radio de las pequeñas?



Las niñas
Cinco niñas cuyos nombres son J, B, A, M, L, descubrieron que pesándose de dos en dos e intercambiándose una cada vez, podían conocer el peso de todas ellas gastando una sola moneda (por ejemplo, primero se pesan juntas J y M, luego se baja J y se sube A, y así se pesan juntas M y A, a continuación se baja una de ellas y se sube otra, sin que nunca se repita la misma pareja). Una vez pesadas todas las parejas, sus pesos resultaron ser: 129,116,125,114, 124,121,123,118,120,122. ¿Sabrías calcular el peso de cada una de las cinco niñas?

Un rectángulo muy troceado
El rectángulo de la figura ABCD está dividido en cuadrados. Calcula la altura y la longitud del rectángulo sabiendo que el cuadradito más pequeño de todos tiene 2 metros de lado.



TRIÁNGULOS EQUILÁTEROS

Tenemos un triángulo equilátero ABC de lado 6 centímetros. Queremos inscribir en él un nuevo triángulo equilátero DEF de modo que DE sea perpendicular a AC, EF sea perpendicular a BC y FD sea perpendicular a BA.

Hallar la longitud del lado de este triángulo DEF.

CINCO NÚMEROS NATURALES

Escribimos cinco números naturales cualesquiera. Demostrar que siempre podemos elegir dos de ellos cuya diferencia sea múltiplo de 4.

Intenta enunciar otras afirmaciones semejantes a la anterior.

LAS VELAS

Ayer por la noche, mientras estudiaba, se fue la luz. Inmediatamente encendí dos velas y seguí trabajando hasta que arreglaron la avería. Al día siguiente quise averiguar cuánto duró al apagón, pero no sabia cuando empezó ni cuando terminó. Solamente me acuerdo que la primera vela estaba previsto que durara cinco horas y la segunda cuatro horas.

¿Cuánto duró el apagón si la primera vela se había quedado cuatro veces más larga que la segunda?.

Aplicaciones útiles

A veces resulta muy útil aplicar alguna que otra fórmula para resolver un problema. Como podrás comprobar fácilmente la siguiente fórmula es cierta:

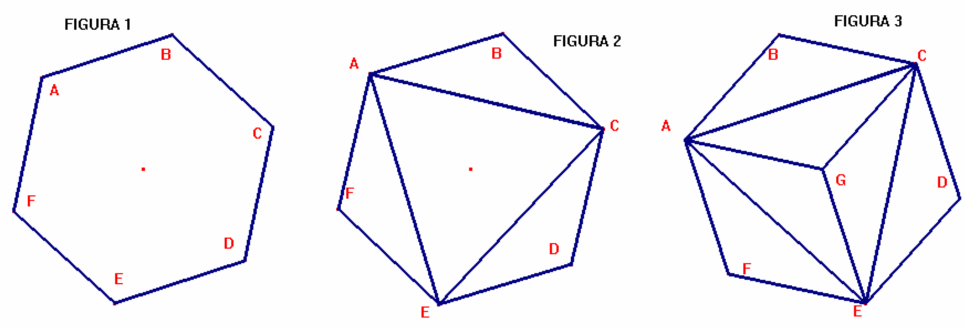
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x+1)x}$$

Sabrías utilizarla para calcular con rapidez y exactitud el valor de la suma siguiente:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots+\frac{1}{9900}+\frac{1}{10100}$$

Circuitos de Gaudí El catalán Antoni Gaudí, uno de los más grandes arquitectos del siglo XX, diseñó un suelo de parquet basado en las figuras que estás viendo.
Fíjate en la figura 1 y observa que podemos recorrer todos sus lados sin repetir ninguno. Por ejemplo, si salimos del vértice A, un camino posible es ABCDEFA. Y si salimos de C otro camino posible es CBAFEDC.

a) ¿Cuántos caminos diferentes podemos escribir para recorrer los lados de la Figura 1?.
b) ¿Podemos recorrer igualmente la Figura 2 sin repetir ningún lado?. Indica de manera ordenada todos los recorridos que veas que empiecen en A. ¿Cuántos crees que hay en total (empezando en A)?.
c) Mira por último la figura 3. ¿Crees que será posible recorrela de igual manera, es decir, pasando por cada lado una sola vez?



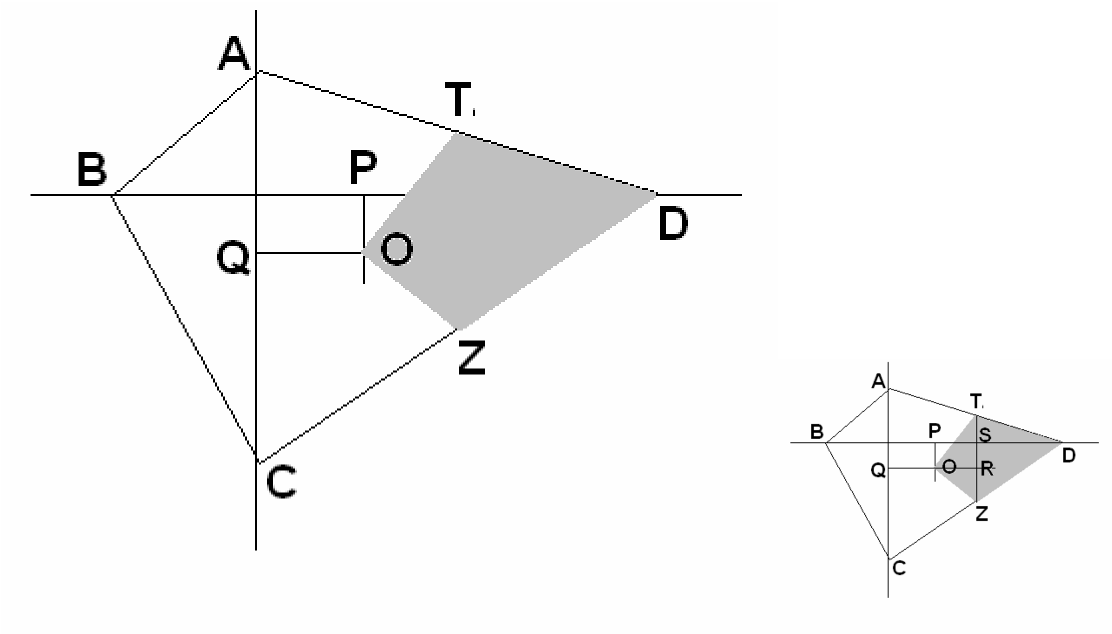
Múltiplos
Si el número de mi casa fuese múltiplo de 3, entonces se trataría de un número comprendido entre 50 y 59, inclusive. Si el número de mi casa no fuese múltiplo de 4, entonces se trataría de un número comprendido entre 60 y 69, inclusive. Si el número de mi casa no fuese múltiplo de 6, entonces se trataría de un número comprendido entre 70 y 79, inclusive. ¿Cuál es el número de mi casa?

El 388

El número 388 tiene muchos múltiplos. Por ejemplo, el 11640 es uno de ellos y tiene 5 dígitos. ¿Sabrías decir cuántos múltiplos del 388 tienen 7 dígitos?.
Piensa un poco más y respóndenos: ¿cuántos múltiplos del 388 tienen 7 dígitos y acaban en 388?.

La cuarta parte

En el gráfico de la figura, las rectas AC y BD son perpendiculares, OP es paralela a AC y OQ es paralela a BD. Los puntos P, Q, T y Z son los puntos medios de los lados BD, AC, AD y CD respectivamente.
Demuestra que el área del cuadrilátero oscuro OTDZ es la cuarta parte del área total del cuadrilátero ABCD.



Los cuadrados progresivos

Un cuadrado se llamará progresivo si al movernos de una celda a la siguiente se suma un cierto número (si es hacia la derecha o hacia abajo) o se le resta (si es hacia la izquierda o hacia arriba).
Por ejemplo, fíjate en el siguiente cuadrado de 4 x 4 celdas. Es un cuadrado progresivo de valor 3

2	5	8	11
5	8	11	14
8	11	14	17
11	14	17	20

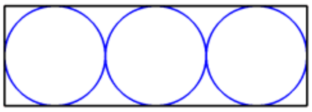
Construye un cuadrado de 5 x 5 celdas de valor 2 que contenga el nº 43.

Demuestra que para un cuadrado progresivo cualquiera de 4 x 4 celdas, la suma de los números que contiene es siempre múltiplo de 16. (Por ejemplo, si sumas todos los números que aparecen en el cuadrado progresivo anterior sale 176).
¿Que ocurrirá en los de de 5 x 5?, ¿y en los de 6 x 6?,...

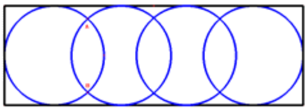
OLIMPIADA MATEMÁTICA de CIUDAD REAL
SOCIEDAD CASTELLANO MANCHEGA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

El joyero

Ana recibió como regalo de cumpleaños un joyero. Comprobó que en él cabían tres de las cuatro pulseras iguales que tenía, si las disponía según vemos en la figura



Para colocar la cuarta se propuso hacerlo de manera que a la vista quedase una disposición simétrica. Le quedó así:



Calcula las dimensiones del joyero si la medida del segmento AB es igual a la raíz cuadrada de 20.

¡La gente es muy rara!

A mi amigo Antonio no le gusta sumar ni restar, pero sí le gusta mucho multiplicar y dividir. Un día me dijo que en lugar de sumar dos números enteros lo que había hecho era multiplicarlos y el resultado lo dividió por 2.
Yo le dije que eso era una tontería porque por ejemplo 6+4=10, y en cambio si hago la multiplicación 6*4=24 y al dividir por 2 queda 12, que no es lo mismo que 10.
Él me insistió diciéndome que había encontrado dos números para los que sí era cierto lo que él hacía. Encuéntralos.
Cuándo hayas hecho lo anterior intenta encontrar otros dos números para los que sea cierto el procedimiento de Antonio pero dividiendo por 3.
¿Y por 5?, …

Europa

El emblema de Europa está compuesto por estrellas de cinco puntas en la que cada una representa un país (Figura 1). Os proponemos un juego que consiste en cambiar el color de las estrellas.
Normas:

*Si cambiamos el color de una estrella (de blanco a negro o de negro a blanco) deben cambiar de color las dos estrellas que están junto a ella (mira la figura 2)

*Después de cada cambio que realicemos hay que anotar el número de cambios que ha tenido cada estrella (fíjate en las figuras 2 y 3)

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Las figuras 4, 5 y 6 nos muestran algunas situaciones posibles o imposibles después de unas cuántas jugadas.

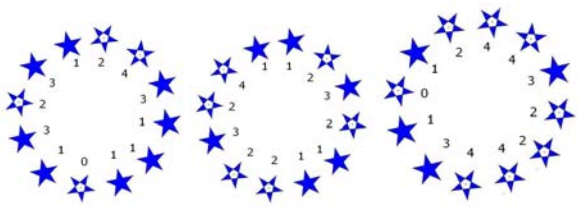


Figura 4 Figura 5 Figura 6

¿Cuál de entre ellas es correcta? . Explica por qué no lo son las otras.
¿Sabrías decir las jugadas que se han realizado hasta llegar a la situación correcta?
Utiliza una buena notación para explicarte.

La torre solar

La prensa local nos informa de que se va a construir a partir del año 2007 una Torre Solar en Fuente El Fresno, pueblo del norte de la provincia de Ciudad Real situado en los Montes de Toledo.

La torre se elevará hasta los 750 metros de altura, tendrá un diámetro en la base de 70 metros y el invernadero que la rodeará tendrá un diámetro de 2.9 Km. Se tardará en construir varios años y la energía que produzca podrá abastecer a una población de unas 120.000 personas.

1.- ¿Sabrías decirnos qué ángulo de elevación tendría el sol cuando la sombra de la torre sea igual a la altura de la misma?

2.- Imagina que al construirla cada mes levantan un 5% menos que el mes anterior, y el primer mes consiguen levantar los primeros 35 metros, ¿cuántos meses serán necesarios para llegar a los 700 metros?.

3.- Si a las 7 de la tarde de un día cualquiera de agosto la torre de la iglesia de Fuente El Fresno que mide 20 metros proyecta una sombra de 65 metros, ¿cuál será el área de la sombra de la torre solar?

4.- Imagina la torre llena de agua. ¿Cuántas piscinas de dimensiones olímpicas (50m x 25m x 2m) se podrían llenar con toda esa agua?

Proyecciones en el pentágono

Fíjate en las dos figuras siguientes. Hemos dibujado un pentágono regular de vértices ABCDE y hemos tomado un punto P de su interior.

Después, trazando las perpendiculares a cada lado del pentágono desde el punto P hemos determinado el punto de corte con dicho lado. A este punto de corte le llamamos Proyección de P sobre ese lado. Por ejemplo, la recta “r” que es perpendicular al lado AB, lo corta en el punto “R”, y decimos que “R” es la proyección de P sobre el lado AB.

En la figura 1, las proyecciones de P sobre el pentágono son los puntos R,S,T,U y V. Sin embargo en la figura 2 no ocurre así, pues la recta “s” y la “v” no cortan a sus respectivos lados, de manera que P tiene únicamente 3 puntos de proyección sobre el pentágono: R,T y U.

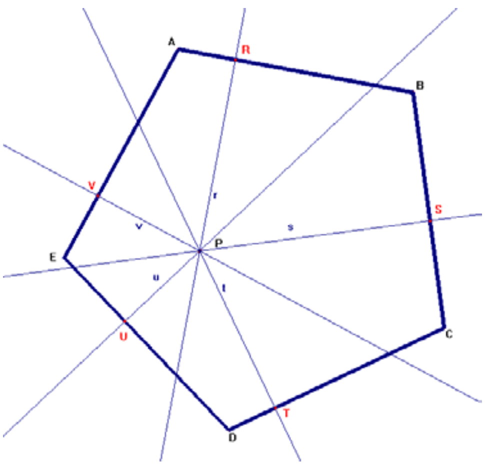


Figura 1

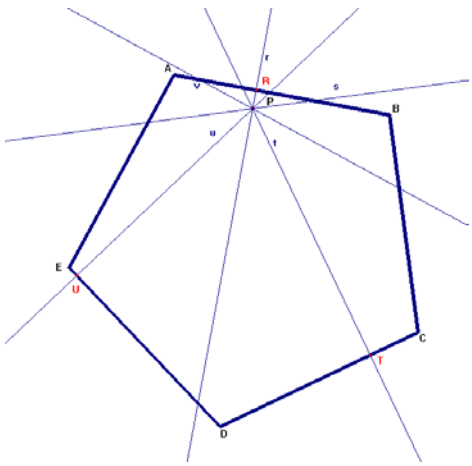


Figura2

Determina la zona del interior del pentágono en la que cualquier punto P de dicha zona tenga 5 puntos de proyección sobre el pentágono.

Encuentra la zona interior en la que hay únicamente 3 puntos de proyección.

¿Y con 4 proyecciones?, ¿Y con 2 proyecciones?, ¿Y con 1 proyección?.

Si se elige al azar un punto del interior del pentágono, ¿qué es más probable, que tenga 3 proyecciones o que tenga 4 proyecciones?

Explica siempre tus razonamientos y soluciones.

La anguila Ouroboros

Las leyendas de la antigüedad nos aseguran que en tiempos pasados vivía una serpiente llamada Ouroboros que de manera continua engullía su propia cola al tiempo que su cuerpo crecía, de manera que nunca llegaba a morir.

En la actualidad, los artesanos del mazapán de Toledo nos obsequian con unas serpientes o anguilas que son una delicia para el paladar. Es posible que pensaran en Ouroboros cuando inventaron este dulce. A los matemáticos, Ouroboros también nos sugiere algunas actividades. ¡Pero no son tan dulces como el mazapán!.

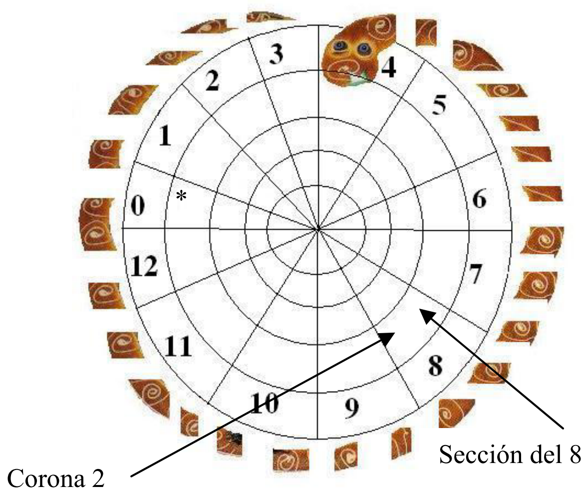
Te proponemos este Ouroboros de cinco coronas, que consiste en completar con números del 0 al 9 las casillas de cada corona circular.

La corona inicial (1ª) es la más externa y sólo te servirá para rellenar la 2ª corona. A su vez, la 2ª corona la usarás únicamente para rellenar la corona 3ª, y así con las demás.

Fíjate en la 2ª corona. El nº que pongamos en el sector del (*) que corresponde al 0 de la corona 1ª, indicará el nº de ceros que hay en las secciones de la 2ª corona. Igualmente, el nº que pongamos en la 2ª corona en el sector del 1, indicará el nº de unos que hay en las secciones de la 2ª corona, y así sucesivamente.

Por ejemplo, supongamos que en la 3ª corona hay un 5. En ese caso, si ponemos en la sección del 5 de la 4ª corona un 3 indicaría que en la 4ª corona hay 3 cincos.

Inicialmente, la corona 1 ya está completa pues contiene los números del 0 al 12.



Una vez tengas completa la 2ª corona, rellena la 3ª corona con igual criterio. Análogamente con el nivel 4 y nivel 5.